Banco Central de Chile
Documentos de Trabajo

Central Bank of Chile
Working Papers

N° 531

Octubre 2009

LA CURVA DE RENDIMIENTO BAJO NELSON-SIEGEL

Rodrigo Alfaro

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: http://www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de $500 si es dentro de Chile y US$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: http://www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper. Printed versions can be ordered individually for US$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.

BANCO CENTRAL DE CHILE

CENTRAL BANK OF CHILE

Documentos de Trabajo del Banco Central de Chile
Working Papers of the Central Bank of Chile
Agustinas 1180
Teléfono: (56-2) 6702475; Fax: (56-2) 6702231

Documento de Trabajo
N° 531

Working Paper
N° 531

LA CURVA DE RENDIMIENTO BAJO NELSON-SIEGEL

Rodrigo Alfaro
Gerencia de Estabilidad Financiera
Banco Central de Chile

Resumen

Nelson y Siegel (1987) proponen un modelo paramétrico para la curva de rendimiento. Dada la simplicidad de su estimación, el modelo se hizo popular entre analistas tanto de mercado como de bancos centrales. Diebold y Li (2006) entregan una versión dinámica de Nelson-Siegel (DNS), donde este se desempeña bien en ejercicios de predicción fuera de muestra. Sin embargo, el modelo fue originalmente propuesto como una herramienta de ajuste de curva, en contraste con haber sido obtenido desde un marco teórico que no permite el arbitraje. Christensen y otros (2009) muestran que el modelo DNS no permite el arbitraje, entregándole soporte teórico. En este artículo consideramos una versión discreta del modelo DNS y seguimos la notación desarrollada por Campbell y otros (1997) para mostrar que el modelo pertenece a la clase de los modelos "afines". Esto provee de una prueba alternativa a la presentada en Christensen y otros (2009), dado que utilizamos la ecuación de Euler para mostrar que el rendimiento de un bono es lineal en tres factores. Al igual que en Balduzzi y otros (1998), uno de estos factores es inobservable, mientras que los observables pueden ser asociados con la tasa de interés de largo plazo y el premio por plazo, respectivamente. Finalmente, discutimos las implicancias del modelo DNS para la tasa *forward* y para la tasa de interés neutral.

Abstract

Nelson and Siegel (1987) propose a parametric model for the yield curve. Since it is easy to estimate, it became popular among practitioners and Central Bank's analysts. Diebold and Li (2006) provide a dynamic version of the Nelson-Siegel (DNS) model, showing that it performs well in out-of-sample forecasting exercises. However, the model was originally proposed as a curve-fitting tool as opposed to being obtained from a theoretical non-arbitrage framework. Christensen et al. (2009) show that the DNS model is arbitrage-free, giving it theoretical support. In this paper we consider a discrete version of the DNS model, and following the notation developed in Campbell et al. (1997), we show that it belongs to the class of affine-yield model. This provides an alternative proof of the one presented in Christensen et al. (2009), since we use the Euler Equation to show that the yield on a bond is linear in three factors. As in Balduzzi et al. (1998), one of these factors is unobserved, whereas the observed ones can be associated with the long term interest rate and the term spread, respectively. Finally, we discuss the implications of the DNS model for forward rate and the neutral interest rate.

Se agradecen los comentarios de Natalia Gallardo y un árbitro anónimo.

All models are wrong, but some are uselful

(Dicho popular en el sector financiero)

1 Introducción

La curva de rendimiento recoge mucha información sobre las expectativas de los agentes económicos respecto de la evolución de la economía. Por ejemplo, una curva con pendiente positiva implica que probablemente nos encontramos en un período de bajo crecimiento (Estrella y Hardouvelis, 1991) con una inflación acotada, donde es posible que la Política Monetaria este siendo expansiva, esto debido a que dicha política actua sobre la tasa más corta de la curva.

La estimación de la curva de rendimiento ha despertado el interés tanto académico como de los analistas financieros. Estos últimos han desarrollado modelos que permiten interpolaciones de madurez a fin de poder completar la curva, como son curvas de ajuste cúbicas suavizadas. Esta visión es estática en el sentido que no explota la dimensión de series de tiempo de las tasas de interés que podría implicar una estimación más eficiente de la curva. Por otra parte los modelos teóricos más puros nacen de la mano de la modelación de procesos estocásticos y son acotados a modelos que no presentan oportunidades de arbitraje. En la práctica estos modelos, denominados a fines o de factores, no han sido completamente satisfactorios tanto para un adecuado ajuste estático de la curva como para elementos de predicción.

Nelson y Siegel (1987) proponen un modelo de ajuste de la curva de rendimiento donde la tasa de retorno depende de la madurez del instrumento. Este modelo ha sido ampliamente utilizado por los analistas debido a su simplicidad y a que presenta consistencia entre la tasa forward y la curva de rendimiento. Diebold y Li (2006) proponen una visión dinámica para este modelo estableciendo que Nelson-Siegel se compone de 3 factores, los cuales son: Nivel, Pendiente y Curvatura. El primero corresponde a la trayectoria de la tasa larga, mientras que el segundo está relacionado con el premio por plazo. Ambos factores son recuperables de los modelos de factores tradicionales. Sin embargo, la Curvatura parecía ajena a estos modelos.

Christensen y otros (2009) presentan una derivación de este modelo bajo el paradigma de no-arbitraje estableciendo que Nelson-Siegel puede recuperase a través de los modelos de factores.

En términos simples, la Curvatura puede ser generada a través de un modelo de factores cuando uno de estos no es observable.

En este artículo se muestra que el modelo Nelson-Siegel corresponde a un caso especial de la familia de los modelos de factores. La principal diferencia de esta presentación respecto de la desarrollada por Christensen y otros (2009) es que acá se presenta una versión discreta del modelo que permite su análisis a través de factores lineales autoregresivos siguiendo a Campbell y otros (1997) en su derivación de los modelos afines. Por tanto las contribuciones de este artículo son: (1) la construcción de la versión discreta del modelo Nelson-Siegel y (2) la demostración de que Nelson-Siegel corresponde a un modelo de factores.

La sección 2 presenta los elementos teóricos necesarios para la derivación de la curva de rendimiento. La sección 3 muestra el modelo Nelson-Siegel en su versión original y en la versión discreta que se propone en este artículo. La sección 4 revisa los modelos de factores presentando la equivalencia entre el modelo Nelson-Siegel y un modelo de 3 factores lineales autoregresivos homocedásticos, donde 2 de los factores son observables. La sección 5 revisa algunas aplicaciones del modelo Nelson-Siegel que tienen relevancia para Chile. Finalmente, una última sección concluye.

2 Definiciones Básicas

En esta sección presentamos los elementos teóricos relevantes para el desarrollo de la curva de rendimiento y una versión discreta del modelo de Nelson y Siegel (1987) que nos permitirá relacionarlo con los modelos de factores lineales.

2.1 Instrumentos de Renta Fija

Consideremos a Z_{nt} como la tasa de descuento que se aplica en t para un flujo que se recibirá en el período $t+n$. De esta forma podemos definir el precio de un bono de descuento o cero cupón que paga una unidad monetaria n períodos adelante como $B_{nt} = (1 + Z_{nt})^{-n}$.

Para simplificar el análisis utilizaremos la versión de capitalización continua de la tasa que corresponde a $z_{nt} = \log(1+Z_{nt})$. Notamos que por Taylor se tiene que $\log(1+Z_{nt}) = Z_{nt}+O\left(Z_{nt}^2\right)$

cuando la función se expande en torno a cero. Dado que las tasas en general son pequeñas, esto significa que en la práctica ambas tasas pueden ser utilizadas indistintamente.

Por tanto, el logaritmo del precio del bono de descuento (b_{nt}) y la tasa de descuento capitalizada continua (z_{nt}) se relacionan como sigue: $b_{nt} = -nz_{nt}$.

Usualmente los bonos de descuento se encuentran concentrados en el tramo más corto de la curva de rendimiento, mientras que para el tramo mediano y de largo plazo los bonos contienen cupones. Esto introduce una dificultad adicional al separar lo que corresponde a una tasa pura de descuento con respecto de una tasa de descuento de un bono (TIR). Esta última corresponde a la tasa de rendimiento que obtendría el inversionista si mantuviera el bono con cupones hasta su madurez, recibiendo todos y cada uno de los pagos consignados en el contrato. El precio de un bono con cupones (P_{nt}) depende de los flujos (F_i) que entregue, los cuales son descontados a su TIR (Y_{nt}):

$$P_{nt} = \frac{F_1}{(1+Y_{nt})} + \frac{F_2}{(1+Y_{nt})^2} + \cdots + \frac{F_n}{(1+Y_{nt})^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1+Y_{nt})^i} \tag{1}$$

Por otra parte, la duración de Macaulay (D_{cnt}) corresponde al promedio ponderado de las "madureces" de cada cupón, siendo el ponderador el valor presente de cada cupón.

$$D_{nt} = \frac{1}{P_{nt}} \left[\frac{1 \cdot F_1}{(1+Y_{nt})} + \frac{2 \cdot F_2}{(1+Y_{nt})^2} + \cdots + \frac{n \cdot F_n}{(1+Y_{nt})^n} \right] = \frac{1}{P_{nt}} \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot F_i}{(1+Y_{nt})^i} \tag{2}$$

Es claro de (2) que para el caso de bonos de descuento $F_i = 0$ para todo $i < n$ mientras que $F_n = 1$. Por ello para esos bonos tenemos que $D_{nt} = n$. Por otra parte, notamos que al derivar el precio con respecto al retorno bruto tenemos que

$$\frac{dP_{nt}}{d(1+Y_{nt})} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot F_i}{(1+Y_{nt})^{i+1}}.$$

Este resultado es similar a la definición de duración. De hecho podemos observar que la duración corresponde a la elasticidad precio-TIR:

$$\frac{dp_{nt}}{dy_{nt}} \equiv \frac{dP_{nt}}{d(1+Y_{nt})}\frac{(1+Y_{nt})}{P_{nt}} = -\frac{1}{P_{nt}}\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot F_i}{(1+Y_{nt})^i} = -D_{nt}.$$

Esto implica que la duración corresponde al efecto de primer orden en cambios de la TIR. Dado esto podemos considerar que en términos de los retornos de los bonos: $y_{nt} \sim z_{D_t}$. Sin embargo, esta relación no es válida en precios. En lo que sigue del artículo consideraremos bonos de descuento para la presentación de los resultados teóricos.

2.2 La Hipótesis de Expectativas

Adicionalmente, tomaremos el retorno neto $(R_{n,t+1})$ de mantener un bono de descuento de madurez n por un período de tiempo como $(1 + R_{n,t+1}) = B_{n-1,t+1}/B_{nt}$. Siguiendo con las definiciones previas esto se expresa como $r_{n,t+1} = b_{n-1,t+1} - b_{nt} = nz_{nt} - (n-1)z_{n-1,t+1}$. Esta ecuación implica que la actual tasa de descuento de madurez n puede ser entendida como un promedio ponderado de tasas del próximo período:

$$z_{nt} = \frac{1}{n}r_{n,t+1} + \frac{(n-1)}{n}z_{n-1,t+1} \tag{3}$$

Análogamente tenemos que $z_{n-1,t} = [1/(n-1)]r_{n-1,t+1} + [(n-2)/(n-1)]z_{n-2,t+1}$. Adelantando un período la ecuación: $z_{n-1,t+1} = [1/(n-1)]r_{n-1,t+2} + [(n-2)/(n-1)]z_{n-2,t+2}$ y reemplazando en (3): $z_{nt} = (1/n)(r_{n,t+1} + r_{n-1,t+2}) + [(n-2)/n]z_{n-2,t+2}$. Notamos que $r_{1,t+n} = z_{1,t+n-1}$, de modo que en reemplazos sucesivos tenemos que: $z_{nt} = (1/n)\sum_{i=0}^{n-1} r_{n-i,t+1+i}$.

Con información en t, los retornos $r_{n-i,t+1+i}$ no son conocidos. Sin embargo, la hipótesis de expectativas puras en logaritmo indica que, por arbitraje, el valor esperado de estos retornos, condicional a la información en t, debiera ser similar a los retornos de las estrategias de inversión segura. Estas corresponden a la compra un bono de descuento que madure en el próximo período, lo cual significa que $E_{t+i}(r_{n-i,t+1+i}) = z_{1,t+i}$. Finalmente por expectativas iterativas tenemos que $E_t[E_{t+i}(r_{n-i,t+1+i})] = E_t(z_{1,t+i})$ lo que implica que:

$$z_{nt} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_t(z_{1,t+i}). \tag{4}$$

Esta ecuación es fundamental para la construcción de la curva de rendimiento ya que indica que la estructura completa de tasas se obtiene de las expectativas de la tasa corta.

Un mecanismo natural para generar la curva de rendimiento viene de la consideración de un proceso estocástico para la tasa más corta de la curva. A modo de ejemplo consideremos un proceso AR(1):

$$z_{1,t+1} = c + \phi z_{1t} + e_{1,t+1} \tag{5}$$

donde $0 < \phi < 1$ y $e_{1,t+1}$ es un error con media cero y varianza finita. De este proceso notamos su media incondicional como $E(z_{1,t+i}) = c/(1-\phi) \equiv z^*$, mientras que la esperanza condicional con información en t es $E_t(z_{1,t+i}) = c(1-\phi^i)/(1-\phi) + \phi^i z_t = (1-\phi^i)z^* + \phi^i z_t$, esto es un promedio ponderado entre la esperanza incondicional y el valor conocido.

Utilizando la ecuación del promedio (4) y la estructura autoregresiva para la tasa más corta presentada arriba, tenemos que la tasa de descuento de madurez n obedece a la siguiente estructura:

$$z_{nt} = z^* + \left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right)\frac{(z_{1t}-z^*)}{n}$$

con $z^* \equiv c/(1-\phi)$ el valor de equilibrio del sistema dinámico. Notamos que en equilibrio ($z_{1t} = z^*$) el modelo implica $z_{nt} = z^*$ lo que significa observar una curva de rendimiento plana. Adicionalmente el caso de raíz unitaria puede ser analizado tomando el límite.

$$\lim_{\phi\to 1}\frac{1-\phi^n}{1-\phi} =^{LH} \lim_{\phi\to 1} n\phi^{n-1} = n.$$

Por lo que bajo no estacionaridad del proceso z_{1t} tenemos que $z_{nt} = z_{1t}$ lo cual indica que todas las tasas de interés tienen raíces unitarias, situación que en la práctica es difícil de rechazar con los tests convencionales.

Por último la tasa de descuento para el bono de madurez infinita es z^* debido a que suponemos $0 < \phi < 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1-\phi^n}{n(1-\phi)} = 0. \tag{6}$$

3 Modelo Nelson-Siegel

Sin duda uno de los modelos más populares en la modelación de la curva de rendimiento es el propuesto por Nelson y Siegel (1987). En esta sección presentamos los resultados de dicho artículo junto con una versión en tiempo discreto que simplifica el análisis del modelo.

3.1 Version Original

El modelo original de Nelson-Siegel está definido en tiempo continuo donde la estructura de la tasa forward instantánea es modelada. Utilizando (4) en su versión continua los autores obtienen la curva de rendimiento, la cual depende de los parámetros de la tasa forward. Luego con datos efectivos de rendimiento de bonos de descuento estiman los parámetros.

La modelación de la tasa forward permite una consistencia entre las tasas de descuento observadas y la directa interpretación de las expectativas de cambios en la tasa instantánea o de más corto plazo. El resultado del artículo es que la tasa de descuento depende de la madurez del instrumento, ajuste que ha sido implementado por algunos analistas a través de polinomios. La ventaja de Nelson-Siegel es que es un modelo parsimonioso, es decir, requiere un número pequeño de parámetros para caracterizar completamente la curva de rendimiento.

La motivación original del modelo es una estructura lineal con el parámetro no lineal calibrado. En aplicaciones empíricas típicamente se estima este parámetro en conjunto con los lineales. Por simplicidad consideraremos el espíritu original del modelo presentándolo en una versión en tiempo, que se ajusta a la notación presentada en las secciones anteriores.

Dado que el modelo es determinístico, el valor esperado de (4) es innecesario. Los autores asumen que la tasa forward instantánea es una función del tiempo, lo que se expresa como:

$f(i) = \lambda_1 + \lambda_2 \exp(-\alpha i) + \alpha\lambda_3 i \exp(-\alpha i)$. Integrando sobre el período de interés obtenemos la tasa de descuento (detalles en sección B.2):

$$z(n) \quad = \quad \lambda_1 + \lambda_2 \left[\frac{1-\exp(-\alpha n)}{\alpha n}\right] + \lambda_3 \left[\frac{1-\exp(-\alpha n)}{\alpha n} - \exp(-\alpha n)\right]. \qquad (7)$$

La estimación sugerida por los autores es la regresión lineal y para su aplicación el parámetro α debe ser calibrado apropiadamente.

3.2 Versión Discreta

La versión discreta considerada en este artículo se basa en $\phi \equiv \exp(-\alpha)$, de modo que si $\alpha > 0$ entonces $0 < \phi < 1$. Por otra parte, tomaremos el hecho de que $\exp(-\alpha) = 1 - \alpha + O(\alpha^2)$ para aproximar α. Así la discretización del modelo para la tasa más corta sería:

$$z_{1,t+i} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}\phi^i + \lambda_{3t}(1-\phi)i\phi^{i-1}.$$

Notamos que el exponente reducido del tercer componente es un ajuste para la discretización que permite calzar la tasa de corto plazo. A su vez, consideramos que los parámetros del modelo pueden cambiar en el tiempo, dando dinámica al modelo como lo sugieren Diebold y Li (2006). Por otra parte, en comparación con otros modelos de ajuste de curva determinísticos como las ecuaciones cúbicas, notamos que Nelson-Siegel presenta un ajuste con una función acotada (ϕ^n) lo que permite que en valores extremos el modelo entregue resultados coherentes.

Considerando la ecuación del promedio (4) y la estructura no aleatoria para la tasa más corta presentada arriba, tenemos que la tasa de descuento de madurez n obedece a la siguiente estructura (ver sección B.3):

$$z_{nt} \quad = \quad \lambda_{1t} + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) + \frac{\lambda_{3t}}{n}\left[\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) - n\phi^{n-1}\right] \qquad (8)$$

El resultado obtenido en (8) es la versión discreta del Nelson-Siegel continuo presentado en (7). La tasa más corta del modelo discreto corresponde a $z_{1t} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}$, mientras que basado en

(6) tenemos que $\lim_{n\to\infty} z_{nt} = \lambda_{1t}$. Estos resultados son idénticos a los obtenidos en el modelo original en tiempo continuo e implican que λ_{1t} corresponde a la tasa más larga de la economía, mientras λ_{2t} es el negativo del premio por plazo. Si bien el tercer factor λ_{3t} no juega un rol en estas tasas le da flexibilidad al modelo para el resto de la curva.

4 Modelos de Factores

En esta sección mostramos que el modelo Nelson-Siegel corresponde a un modelo de factores, por lo que no permite oportunidades de arbitraje. Christensen y otros (2009) presentan este resultado considerando valoración de portafolios en tiempo continuo donde las estrategias de coberturas implican un rebalanceo constante del portafolio de activos. En la presente exposición se utiliza el instrumental de valoración de activos basado en la Ecuación de Euler, con la cual se derivan los precios de los bonos de descuentos bajo el supuesto que el Factor de Descuento Estocástico es función de factores fundamentales de la economía. De esta forma la tasa de descuento obtenida de estos precios es comparable con la versión discreta del modelo Nelson-Siegel presentado en la sección anterior.

4.1 La Ecuación de Euler

La curva de rendimiento puede construirse a través de la ecuación de Euler. En ella se establece que el precio de un activo se encuentra relacionado con sus pagos futuros descontados según el Factor de Descuento Estocástico (FDE) el cual se obtiene de fundamentales de la economía. Usualmente el FDE, denotado por M_{t+1}, se relaciona con el ratio de utilidades marginales del consumo del agente representativo de la economía aunque esta relación puede generalizarse a factores fundamentales (λ's). De este modo, el precio de un bono de descuento en esta ecuación se obtiene como sigue: $B_{nt} = E_t(B_{n-1,t+1}M_{t+1})$, donde M_{t+1} es función de los factores. Por simplicidad trabajaremos con el logaritmo del FDE (m_{t+1}). De este modo el precio del bono de descuento bajo la ecuación de Euler es:

$$b_{nt} = E_t(b_{n-1,t+1} + m_{t+1}) + \nu_n \tag{9}$$

con $m_{t+1} \equiv g(\lambda_{t+1})$, donde g es una función tratable. Por otro lado, ν_n es el factor de Jensen que lo hemos definido como fijo en el tiempo dado que utilizaremos factores homocedásticos (Campbell y otros, 1997). En las próximas secciones revisaremos los modelos de factores sobre la base de la relación (9).

4.2 Modelo de 1 Factor

Vasicek (1977) considera que hay un factor que caracteriza toda la curva de rendimiento. Para ello consideremos que m_{t+1} depende linealmente de un factor dinámico homocedástico, es decir: $m_{t+1} = -\lambda_t + \beta e_{t+1}$, con $\lambda_{t+1} = c + \phi\lambda_t + e_{t+1}$, donde $e_{t+1} \sim N(0, \sigma^2)$ y β es el elemento de correlación entre el FDE y el factor x. Esto implica que m_{t+1} puede ser escrito como un ARMA(1,1), debido a que $m_{t+1} - \phi m_t = -\lambda_t + \beta e_{t+1} + \phi\lambda_{t-1} - \phi\beta e_t$, lo que ordenadamente sería: $m_{t+1} = -c + \phi m_t + \xi_{t+1} + \theta\xi_t$, donde $\xi_t \equiv \beta e_t$ y $\theta \equiv -(1 + \beta\phi)/\beta$.

Ahora consideraremos la solución genérica para el precio de un bono de descuento como $b_{nt} = F_n - G_n\lambda_t$, donde F_n y G_n son funciones de los parámetros del modelo y de la madurez (n). Tomando el lado derecho de (9) tenemos que $E_t(m_{t+1}) = -\lambda_t$ mientras que:

$$
\begin{aligned}
E_t(b_{n-1,t+1}) &= F_{n-1} - G_{n-1}E_t(\lambda_{t+1}) \\
&= F_{n-1} - G_{n-1}(c + \phi\lambda_t).
\end{aligned}
$$

Al igualar los términos asociados con λ_t tenemos $G_n = 1 + \phi G_{n-1}$, mientras que los términos libres implican lo siguiente: $F_n = F_{n-1} - cG_{n-1} + \nu_n$. Resolviendo recursivamente, como se presenta en la Sección B.4, el coeficiente asociado al factor es $G_n = (1 - \phi^n)/(1 - \phi)$.

Por construcción $b_{0,t+1} = 0$, luego $F_0 = G_0 = 0$. Considerando esto para $n = 1$ tenemos $b_{1t} = E_t(m_{t+1} + b_{0,t+1}) + \nu_1 = -\lambda_t + \nu_1$ lo que implica que $F_1 = \nu_1$ y $G_1 = 1$. Debido a que la tasa puede ser obtenida como $z_{nt} = -(1/n)b_{nt}$ tenemos que $z_{1t} = -b_{1t} = \lambda_t - \nu_1$, lo que identifica al factor como la tasa de interés más corta de la economía. Tomando $\gamma_n \equiv -F_n/n$ la tasa para una madurez n se define como

$$z_{nt} = \gamma_n + \frac{\lambda_t}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right).$$

Por (6) notamos que $\lim_{n\to\infty} z_{nt} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n \equiv \gamma_\infty$, es decir, la tasa larga converge a una constante que depende de ν_∞, c y ϕ. Es interesante observar que bajo $\phi = 1$ y $c = 0$ tenemos que $F_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$, lo que significa que el precio acumulará premios por plazo asociados a los términos de Jensen de la Ecuación de Euler. Por otro lado, el modelo se reduce a $z_{nt} = \gamma_n + \lambda_t$, lo que implica que $z_{nt} = (\gamma_n - \gamma_1) + z_{1t}$. Para que esta última relación sea equivalente a la presentada bajo el proceso autoregresivo necesitamos que $\gamma_n = 0$ para toda madurez, lo que ocurre cuando se eliminan todos los términos ν_n. Esto último supone σ pequeño (ver sección B.5).

4.3 Modelo de 2 Factores

Empíricamente es difícil ajustar toda la curva con un solo factor por tanto consideremos el caso de dos factores, esto es $m_{t+1} = -\lambda_{1t} - \lambda_{2t} + e_{0,t+1}$, con $\lambda_{it} = c_i + \phi_i \lambda_{i,t-1} + e_{it}$. Considerando la misma solución genérica: $b_{nt} = F_n - G_{1n}\lambda_{1t} - G_{2n}\lambda_{2t}$. Esta vez el lado derecho de (9) se compone de $E_t(m_{t+1}) = -\lambda_{1t} - \lambda_{2t}$, pues ambos factores son observados, y

$$\begin{aligned} E_t(b_{n-1,t+1}) &= F_{n-1} - G_{1,n-1}E_t(\lambda_{1,t+1}) - G_{2,n-1}E_t(\lambda_{2,t+1}) \\ &= F_{n-1} - G_{1,n-1}(c_1 + \phi_1\lambda_{1t}) - G_{2,n-1}(c_2 + \phi_2\lambda_{2t}). \end{aligned}$$

Nuevamente, al igualar los términos asociados con λ's tenemos: $G_{1n} = 1 + \phi_1 G_{1,n-1}$ y $G_{2n} = 1 + \phi_2 G_{2,n-1}$. Los términos libres implican: $F_n = F_{n-1} - c_1 G_{1,n-1} - c_2 G_{2,n-1} + \nu_n$. De manera análoga al caso de un factor tenemos: $G_{1n} = (1 - \phi_1^n)/(1 - \phi_1)$ y $G_{2n} = (1 - \phi_2^n)/(1 - \phi_2)$. En este caso la tasa de descuento obedece a la siguiente estructura:

$$z_{nt} = \gamma_n + \frac{\lambda_{1t}}{n}\left(\frac{1-\phi_1^n}{1-\phi_1}\right) + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi_2^n}{1-\phi_2}\right)$$

donde $\gamma_n \equiv -F_n/n$. De la sección anterior, recordamos que si $\phi_1 \to 1$ entonces $G_{1n} \to n$. Esta observación tiene una información adicional que es que el proceso estocástico de λ_{1t} es una raíz unitaria. Por simplicidad asumiremos también que $c_1 = 0$, es decir, una caminata aleatoria pura. Como complemento tomaremos al proceso λ_{2t} como estacionario con media cero lo que lleva a que $c_2 = 0$ y con ello $F_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$. Tomando el hecho obtenido del análisis de un factor, forzaremos $\nu_n = 0$ por lo que $\gamma_n = 0$. De esta forma el modelo se reduce a:

$$z_{nt} = \lambda_{1t} + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi_2^n}{1-\phi_2}\right) \tag{10}$$

Este modelo se basa en que las tasas de descuento se encuentran explicadas por dos factores dinámicos. Estos factores son homocedásticos y centrados en cero. Además el primero de ellos es una raíz unitaria y el segundo un proceso AR(1) estacionario.

Notamos que si $n = 1$ entonces $z_{1t} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}$, mientras que basado en (6) tenemos que $\lim_{n\to\infty} z_{nt} = \lambda_{1t}$. Esto nos indica que el primer factor (λ_{1t}) corresponde a la tasa de largo plazo mientras que el segundo es la diferencia corta-larga, lo que corresponde al negativo del premio por plazo. Es interesante observar que el modelo implica que la tasa de largo plazo tiene raíz unitaria mientras que el premio por plazo es estacionario. El primer hecho es usualmente aceptado por los datos, en donde es difícil rechazar la hipótesis de raíz unitaria, mientras que el segundo punto nos corrobora la cointegración entre tasas de distinta madurez.

4.4 Modelo con K factores

Una extensión natural del modelo de 2 factores es la extensión a K factores lineales. Cortázar y otros (2002) proponen 3 factores para la estimación de la curva de rendimiento en Chile. Este modelo es la base para los cálculos de las curvas de rendimiento realizadas por RiskAmerica, institución de análisis de mercado perteneciente a la Pontificia Universidad Católica. La tasa de descuento en el caso de K factores será entonces una combinación lineal de ellos:

$$z_{nt} = \gamma_n + \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_{kt}}{n}\left(\frac{1-\phi_k^n}{1-\phi_k}\right). \tag{11}$$

Como revisamos para el caso de 2 factores en este modelo la tasa corta será la suma de los factores más γ_1, mientras que la tasa larga dependerá de γ_∞ y de los factores que son persistentes, es decir de aquellos que tengan $\phi_k = 1$.

4.5 Modelo con un factor no observable

Balduzzi y otros (1998) presentan un modelo alternativo de 2 factores basado en que un factor no es observable (λ_2) y representa la tendencia del factor observable. De este modo, $m_{t+1} = -\lambda_{1t} + e_{0,t+1}$ con $\lambda_{1t} = (1-\phi_1)\lambda_{2,t-1} + \phi_1\lambda_{1,t-1} + e_{1t}$ y $\lambda_{2t} = c_2 + \phi_2\lambda_{2,t-1} + e_{2t}$. Notamos que el precio para el bono de descuento puede escribirse en función de ambos factores como sigue: $b_{nt} = F_n - H_{1n}\lambda_{1t} - H_{2n}\lambda_{2t}$. El primer componente del lado derecho de (9) es $E_t(m_{t+1}) = -\lambda_{1t}$, mientras que el segundo elemento es:

$$
\begin{aligned}
E_t(b_{n-1,t+1}) &= F_{n-1} - H_{1,n-1}E_t(\lambda_{1,t+1}) - H_{2,n-1}E_t(\lambda_{2,t+1}) \\
&= F_{n-1} - H_{1,n-1}[(1-\phi_1)\lambda_{2t} + \phi_1\lambda_{1t}] - H_{2,n-1}(c_2 + \phi_2\lambda_{2t}).
\end{aligned}
$$

Igualando los coeficientes para la constante y λ_1 obtenemos resultados similares a los del modelo presentado arriba: $F_n = F_{n-1} - c_2H_{2,n-1} + \nu_n$ y $H_{1n} = 1 + \phi_1H_{1,n-1} = (1-\phi_1^n)/(1-\phi_1)$, mientras que para λ_2 tenemos: $H_{2n} = (1-\phi_1)H_{1,n-1} + \phi_2H_{2,n-1}$. Notamos que reemplazando $H_{1,n-1}$ tenemos $H_{2n} = (1-\phi_1^{n-1}) + \phi_2H_{2,n-1}$, lo cual puede ser resuelto recursivamente, como se presenta en la Sección B.6. De este modo, bajo el supuesto que $\phi_1 \neq \phi_2$ tenemos que $H_{2n} = (1-\phi_2^n)/(1-\phi_2) - (\phi_2^n - \phi_1^n)/(\phi_2 - \phi_1)$. Tomando a $\gamma_n \equiv -F_n/n$, la tasa de interés puede ser escrita como sigue:

$$
z_{nt} = \gamma_n + \frac{\lambda_{1t}}{n}\left(\frac{1-\phi_1^n}{1-\phi_1}\right) + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left[\left(\frac{1-\phi_2^n}{1-\phi_2}\right) - \left(\frac{\phi_2^n - \phi_1^n}{\phi_2 - \phi_1}\right)\right] \qquad (12)
$$

Notamos que bajo $n = 1$ tenemos $b_{1t} = E_t(m_{t+1}) = -\lambda_{1t}$, mientras que el coeficiente del segundo factor es cero por tanto $z_{1t} = \gamma_1 + \lambda_{1t}$, lo que es equivalente a lo obtenido bajo el modelo de 1 factor. Del mismo modo, la tasa de larga es constante y depende de los parámetros del modelo ya que $\lim_{n\to\infty} z_{nt} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n \equiv \gamma_\infty$.

En el caso en que $\phi_2 = \phi_1$ podemos explotar el resultado obtenido para H_{2n} tomando el límite de ϕ_2 aproximándose a ϕ_1 lo que en el segundo componente se manifiesta como sigue:

$$\lim_{\phi_2 \to \phi_1} \frac{\phi_2^n - \phi_1^n}{\phi_2 - \phi_1} =^{LH} \lim_{\phi_2 \to \phi_1} n\phi_2^{n-1} = n\phi_1^{n-1}$$

Esto implica que la tasa de interés bajo $\phi_2 = \phi_1$ se reduce a

$$z_{nt} = \gamma_n + \frac{\lambda_{1t}}{n}\left(\frac{1-\phi_1^n}{1-\phi_1}\right) + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left[\left(\frac{1-\phi_1^n}{1-\phi_1}\right) - n\phi_1^{n-1}\right] \tag{13}$$

Notamos que el coeficiente del último factor es similar a la del modelo Nelson-Siegel. Lo que indica que este modelo presenta un factor no observable.

4.6 Modelo de Nelson-Siegel

En las secciones previas hemos presentado varios modelos de factores notando los resultados de estos bajo raíz unitaria y en el caso de factores no observables. De (10) notamos que Nelson-Siegel requiere de un factor con raíz unitaria por lo que consideramos $\lambda_{1t} = \lambda_{1,t-1} + e_{1t}$. De (13) requerimos un factor estacionario cuya tendencia sea no observable. La persistencia de este factor y la de su tendencia son también idénticas. Esto es: $\lambda_{2t} = (1-\phi)\lambda_{3,t-1} + \phi\lambda_{2,t-1} + e_{2t}$ con $\lambda_{3t} = \phi\lambda_{3,t-1} + e_{3t}$.

Dado que solo los factores 1 y 2 son observables, entonces $E_t(m_{t+1}) = -\lambda_{1t} - \lambda_{2t}$. Sin embargo el precio del bono de descuento se expresa en términos de todos los factores como sigue: $b_{nt} = F_n - H_{1n}\lambda_{1t} - H_{2n}\lambda_{2t} - H_{3n}\lambda_{3t}$. De este modo:

$$\begin{aligned} E_t(b_{n-1,t+1}) &= F_{n-1} - H_{1,n-1}E_t(\lambda_{1,t+1}) - H_{2,n-1}E_t(\lambda_{2,t+1}) - H_{3,n-1}E_t(\lambda_{3,t+1}) \\ &= F_{n-1} - H_{1,n-1}\lambda_{1t} - H_{2,n-1}[(1-\phi)\lambda_{3t} + \phi\lambda_{2t}] - H_{3,n-1}\phi\lambda_{3t}. \end{aligned}$$

Para λ_1 tenemos $H_{1n} = 1 + H_{1,n-1}$ lo que implica que $H_{1n} = n$. Para λ_2 un factor ya derivado aparece: $H_{2n} = 1 + \phi H_{2,n-1} = (1-\phi^n)/(1-\phi)$. Finalmente, notamos que para el factor no observado tenemos: $H_{3n} = (1-\phi)H_{2,n-1} + \phi H_{3,n-1}$. En este caso la solución como fue formulada anteriormente es $H_{3n} = (1-\phi^n)/(1-\phi) - n\phi^{n-1}$. Considerando estos resultados y $\gamma_n = -F_n/n$

tenemos que:

$$z_{nt} \;=\; \gamma_n + \lambda_{1t} + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) + \frac{\lambda_{3t}}{n}\left[\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) - n\phi^{n-1}\right]$$

Ignorando los términos de Jensen (ν_n) obtenemos el modelo Nelson-Siegel presentado en (8). Es importante notar que la presente presentación considera el uso de la Ecuación de Euler para valorar activos, mientras que Christensen y otros (2009) presenta el mismo resultado en tiempo continuo donde el argumento utilizado es que no hay oportunidades de arbitrajes.

5 Aplicaciones del modelo Nelson-Siegel

En esta sección revisamos aplicaciones de la curva de rendimiento que tienen relevancia para Chile utilizando el modelo Nelson-Siegel: análisis de expectativas de la tasa corta, tasa de interés neutral y ejercicios de tensión ante problemas de liquidez. Una revisión de la literatura empírica de los trabajos de la curva de rendimiento para Chile puede ser revisada en el Apéndice A.

5.1 Expectativas de Tasa Corta

Herrera y Magendzo (1997) motivan la estimación de la curva de rendimiento utilizando Nelson-Siegel con la estimación de la curva forward, la cual permite rescatar las expectativas de la Tasa de Política Monetaria. Bajo este modelo en su versión dinámica la tasa más corta es una variable aleatoria $z_{1,t+i} = \lambda_{1,t+i} + \lambda_{2,t+i}$. Tomando valores esperados notamos que $E_t(\lambda_{1,t+i}) = \lambda_{1t}$ debido a que este factor es raíz unitaria y haciendo uso de la recursión tenemos $E_t(\lambda_{2,t+i}) = i(1-\phi)\phi^{i-1}\lambda_{3t} + \phi^i\lambda_{2t}$. Por tanto las expectativas de tasas cortas se obtienen como sigue:

$$E_t(z_{1,t+i}) = E_t(\lambda_{1,t+i}) + E_t(\lambda_{2,t+i}) = \lambda_{1t} + \phi^i\lambda_{2t} + i(1-\phi)\phi^{i-1}\lambda_{3t}.$$

Un cambio en las expectativas se traduce en un cambio en los factores dinámicos. Por ejemplo suponemos que en el período $t-1$ estamos interesados en la tasa corta que estará vigente en 2 períodos más adelante, esto puede ser obtenido como sigue:

$$
\begin{aligned}
E_{t-1}(z_{1,t+1}) &= E_{t-1}(\lambda_{1,t+1} + \lambda_{2,t+1}) \\
&= \lambda_{1,t-1} + (1-\phi)E_{t-1}(\lambda_{3t}) + \phi E_{t-1}(\lambda_{2t}) \\
&= \lambda_{1,t-1} + (1-\phi)\phi\lambda_{3,t-1} + \phi(1-\phi)\lambda_{3,t-1} + \phi^2\lambda_{2,t-1} \\
&= \lambda_{1,t-1} + \phi^2\lambda_{2,t-1} + 2(1-\phi)\phi\lambda_{3,t-1}.
\end{aligned}
$$

Nuestra comparación puede ser a la misma tasa, es decir $A = E_t(z_{1,t+1}) - E_{t-1}(z_{1,t+1})$, o al mismo plazo, digamos $B = E_t(z_{1,t+2}) - E_{t-1}(z_{1,t+1})$. En el primer caso nos interesa compararlo con $E_t(z_{1,t+1}) = \lambda_{1t} + \phi\lambda_{2t} + (1-\phi)\lambda_{3t}$, mientras en el segundo ejercicio nuestro objetivo es $E_t(z_{1,t+2}) = \lambda_{1t} + \phi^2\lambda_{2t} + 2(1-\phi)\phi\lambda_{3t}$. En resumen tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A &= [\lambda_{1t} + \phi\lambda_{2t} + (1-\phi)\lambda_{3t}] - [\lambda_{1,t-1} + \phi^2\lambda_{2,t-1} + 2(1-\phi)\phi\lambda_{3,t-1}], \\
B &= [\lambda_{1t} + \phi^2\lambda_{2t} + 2(1-\phi)\phi\lambda_{3t}] - [\lambda_{1,t-1} + \phi^2\lambda_{2,t-1} + 2(1-\phi)\phi\lambda_{3,t-1}].
\end{aligned}
$$

El segundo componente es una medida del cambio en las expectativas, basado en cambios en los factores, dado que $B = (\lambda_{1t} - \lambda_{1,t-1}) + \phi^2(\lambda_{2t} - \lambda_{2,t-1}) + 2(1-\phi)\phi(\lambda_{3t} - \lambda_{3,t-1})$. Reordenando los factores 2 y 3 tenemos que $\lambda_{2t} - \lambda_{2,t-1} = (1-\phi)(\lambda_{3,t-1} - \lambda_{2,t-1}) + e_{2t}$ y $\lambda_{3,t} - \lambda_{3,t-1} = (\phi-1)\lambda_{3,t-1} + e_{3t}$, lo que implica que

$$
\begin{aligned}
B &= e_{1t} + \phi^2(1-\phi)(\lambda_{3,t-1} - \lambda_{2,t-1} + e_{2t}) + 2(1-\phi)\phi[(\phi-1)\lambda_{3,t-1} + e_{3t}] \\
&= [\phi^2(1-\phi) - 2(1-\phi)^2\phi]\lambda_{3,t-1} - \phi^2(1-\phi)\lambda_{2,t-1} + e_t^* \\
&= (5\phi^2 - 2\phi - 3\phi^3)\lambda_{3,t-1} + (\phi^3 - \phi^2)\lambda_{2,t-1} + e_t^*
\end{aligned}
$$

donde $e_t^* = e_{1t} + \phi^2(1-\phi)e_{2t} + 2(1-\phi)\phi e_{3t}$. Notamos que la mayor fuente de cambio en e_t^* proviene del error en el primer factor. De hecho si ϕ es cercano a la unidad entonces $B \approx e_{1t}$. En la sección anterior verificamos que los resultados de Herrera y Magendzo (1997) implican $\hat{\phi} = 0.9$, este resultado es idéntico al reportado por Alfaro (2003): $\hat{\phi} = \exp(-0.1) \approx 0.9$, esto implica que $\hat{B} = 0.063\lambda_{3,t-1} - 0.081\lambda_{2,t-1} + e_t^*$ para el caso chileno. En el período $t-1$ podemos hacer una predicción sobre $\hat{B}$, basado en que $E_{t-1}(\hat{B}) = 0.063\lambda_{3,t-1} - 0.081\lambda_{2,t-1}$, lo cual puede ser calculado explícitamente con la estimación de la curva en dicha fecha.

5.2 Tasa de Interés Neutral

Consideramos la tasa neutral (z_{nt}^N) como aquella que se espera en un horizonte $t+i$, donde i diverge. Del análisis anterior sobre expectactivas tenemos que $E_t(\lambda_{1,t+i}) = \lambda_{1t}$, por lo que el límite en este factor no es relevante. Por otra parte $E_t(\lambda_{2,t+i}) = i(1-\phi)\phi^{i-1}\lambda_{3t} + \phi^i\lambda_{2t}$, y de este modo $\lim_{i\to\infty} E_t(\lambda_{2,t+i}) = 0$. Finalmente, $E_t(\lambda_{3,t+i}) = \phi^i\lambda_{3t}$, el cual también se hace cero en el límite. De esta forma $z_{nt}^N = \lim_{i\to\infty} E_t(z_{n,t+i}) = \lambda_{1t}$, es decir la tasa neutral derivada de Nelson-Siegel corresponde al primer factor (nivel).

Fuentes y Gredig (2008) realizan estimaciones de la tasa de interés neutral para Chile utilizando información de los instrumentos financieros. Ellos proponen en primer lugar utilizar la tasa forward entre los períodos $t+n$ y $t+n+1$, lo cual puede ser expresado en términos de Nelson-Siegel como $\lambda_{1t} + \phi^n\lambda_{2t} + n(1-\phi)\phi^{n-1}\lambda_{3t}$. Notamos que este elemento converge a z_{nt}^N cuando $n\to\infty$, lo cual es consistente con el resultado presentado en el párrafo anterior.

Una segunda medida que proponen los autores es considerar que la tasa corta se compone de un factor latente el cual es una raíz unitaria, mientras la tasa larga comparte dicho factor e incluye un segundo factor latente el cual es estacionario. Recordamos que Nelson-Siegel establece que $z_{1t} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}$ y $\lim_{n\to\infty} z_{nt} = \lambda_{1t}$, donde λ_{1t} tiene raíz unitaria y λ_{2t} es estacionario. Por tanto la estimación de los autores utilizando el filtro de Kalman proporciona precisamente una estimación del primer factor.

5.3 Simulación de Escenarios

Una aplicación directa del modelo de Nelson-Siegel corresponde a la simulación de escenarios a través de la generación de perturbaciones a los factores dinámicos. Lo relevante de este modelo en comparación con incrementos aislados en la curva de rendimiento es que el modelo por construcción preserva la relación entre la curva de rendimiento y la curva forward. Con la primera se pueden generar valoraciones de activos financieros, mientras que la segunda permite establecer el costo de refinanciamiento de flujos pactados.

Retomando el vector de factores del modelo Nelson-Siegel tenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{2t} \\ \lambda_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 1-\phi \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1t-1} \\ \lambda_{2t-1} \\ \lambda_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix}$$

Bajo un escenario de tensión transitorio no se esperan cambios en la tasa de largo plazo (λ_1) por lo que las perturbaciones resultan razonables de ser aplicadas en los factores 2 o 3. Sin embargo, es claro que los efectos de estos factores difieren en los alcances del ejercicio. En particular, una perturbación al factor 3 (e_{3t}) genera un cambio en la tendencia del factor 2. Como revisamos en los estudios empíricos $\hat{\phi} = 0.9$ por lo que dicha perturbación presentaría una propagación considerable para las futuras curvas de rendimiento. Por otra parte, una perturbación en el factor 2 (e_{2t}) genera una reversión al modelo original más rápida por lo que dicho evento sería adecuado para la evaluación de un evento transitorio en la curva de rendimiento como una contracción de la liquidez o un cambio inesperado en la inflación.

6 Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una versión discreta del modelo de Nelson y Siegel (1987), el cual puede ser enmarcado dentro de los modelos de curvas a fines como lo establece en tiempo continuo Christensen y otros (2009). Dada la naturaleza discreta de la presentación del material, se utilizó la notación desarrollada en el capítulo 11 de Campbell y otros (1997).

Los resultados muestran que el modelo Nelson-Siegel puede ser entendido como un modelo de 3 factores, donde 2 de ellos son observables. De estos factores el primero presenta raíz unitaria y el segundo es estacionario cuya media incondicional corresponde al tercer factor, el cual es también dinámico. En este contexto Nelson-Siegel es un modelo estocástico que permite la proyección de la curva como lo plantean Diebold y Li (2006). Dicha proyección puede ser incorporada dentro de un modelo macroeconómico tipo VAR como lo ha realizado para Chile, Morales (2007).

Debido a la consistencia del modelo con respecto a la curva forward y la condición de no arbitraje implícita en la modelación de factores resulta relevante su uso como una herramienta de caracterización de la curva de rendimiento. De este modo, el modelo proporciona sutento analítico para el analísis de expectativas de la tasa corta. Por otra parte, la construcción con factores latentes puede ser entendido en el contexto de tasa neutral de la economía la cual tiene relación directa con el primer factor como lo estiman para Chile Fuentes y Gredig (2008).

Finalmente, Nelson-Siegel puede ser utilizado para la simulación de escenarios, lo cual resulta un marco sencillo para evaluar cambios en la curva ante, por ejemplo, eventos inesperados como problemas de liquidez en el mercado de bonos.

Referencias

Alfaro, R. (2003) "Estimación de la Curva Forward", Mimeo Banco Central de Chile.

Banco Central de Chile (2005) *Características de los Instrumentos del Mercado Financiero Nacional.*

Balduzzi, P., S. Das y S. Foresi (1998) "The central tendency: A second factor in bond yields" Review of Economics and Statistics 80, 62-72.

Campbell, J., A. Lo y A. MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets* Princeton University Press.

Chan, K, G. Karolyi, F. Longstaff y A. Sanders (1992) "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate" Journal of Finance 47:1209-1227.

Christensen, J., F. Diebold, G. Rudebusch (2009) "The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models" Manuscript University of Pennsylvania.

Cortázar, G., E. Schwartz y L. Naranjo (2007) "Term Structure Estimation in Markets with Infrequent Trading" *International Journal of Finance and Economics* 12 (2007): 353369.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates" Econometrica 53: 385-407.

Diebold, F. y C. Li (2006) "Forecasting the term structure of government bond yields" Journal of Econometrics 130:337-364.

Estrella, A. y G. Hardouvelis (1991) "The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity" Journal of Finance 46, no. 2 (June).

Fernández, V. (1999) "Estructura de Tasas de Interés en Chile: la vía no-paramétrica" Cuadernos de Economía 36 (109):1005-1034.

Fuentes, R. y F. Gredig (2008) "La tasa de interés neutral: estimaciones para Chile" Economía Chilena 11(2):47-58.

Herrera, L. y I. Magendzo (1997) "Expectativas Financieras y la Curva de Tasas Forward de Chile" Documento de Trabajo 23, Banco Central de Chile.

Morales, M. (2007) "The Yield Curve and Macroeconomic Factors in the Chilean Economy" Seminarios de Macroeconomía y Finanzas, Banco Central de Chile.

Nelson, C. y A. Siegel (1987) "Parsimonious Modeling of Yield Curve" The Journal of Business 60(4):473-489.

Ochoa, J. (2006) "An interpretation of an affine term structure model for Chile" Estudios de Economía 33(2):155-184.

Parisi, F. (1998) "Tasa de Interés Nominal de Corto Plazo en Chile: una Comparación Empírica de sus Modelos" Cuadernos de Economía 35 (105):161-182.

Vasicek, O. (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure" Journal of Financial Economics 5: 177-188.

Zuñiga, S. (1999) "Modelos de Tasas de Interés en Chile: una revisión" Cuadernos de Economía 36(108):875-893.

A Revisión de la Literatura Empírica

Esta sección presenta una resumida revisión de los trabajos empíricos de la curva de rendimiento realizados para Chile. Dado que ellos utilizan diferentes tipos de instrumentos financieros una revisión detallada de sus características puede encontrarse en Banco Central de Chile (2005).

A.1 Nelson-Siegel

El primer trabajo desarrollado con este modelo corresponde a Herrera y Magendzo (1997) quienes utilizan los PRC (Pagarés Reajustables con Cupones del Banco Central de Chile) para estimar el modelo de Nelson y Siegel (1987) por mínimos cuadrados no lineales. Ellos utilizan información tanto de las licitaciones de estos instrumentos como de las transacciones del mercado secundario obtenidas de la Bolsa de Comercio. Su metodología se basa en encontrar los factores de descuento que minimizan la distancia entre el precio observado del bono y el estimado. Ellos presentan los resultados mensuales entre marzo y junio de 1996.

Interpretando sus resultados en términos del modelo discreto de Nelson-Siegel de la ecuación (8) tenemos aproximadamente que: $\hat{\lambda}_1 = 6\%$, $\hat{\lambda}_2 = 1.2\%$ y $\hat{\lambda}_3 = 0.7\%$, mientras que una estimación del parámetro ϕ puede ser obtenida considerando los valores de los $\hat{\alpha}$'s como 4.8222, 2.8871, 2.6333 y 2.4957 los cuales son reportados en trimestres por lo que deben ser multiplicados por 3. De este modo tenemos que, aproximadamente:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{4}\left[\exp\left(-\frac{1}{14.5}\right) + \exp\left(-\frac{1}{8.7}\right) + \exp\left(-\frac{1}{7.9}\right) + \exp\left(-\frac{1}{7.5}\right)\right] = 0.9$$

Este modelo ha sido utilizado por el Banco Central para establecer las expectativas que el mercado tiene sobre la Tasa de Política Monetaria, las cuales son reportadas en el Informe de Política Monetaria (IPoM).

A.2 Modelos de un factor

Una primera ola de modelos de curvas afines parten con Parisi (1998) quien presenta la estimación de modelos para la tasa de interés de corto plazo como los establecidos por Vasicek (1977) y Cox y otros (1985). Esta modelación corresponde a la estimación de un factor posiblemente no homocedástico y se basa en la investigación empírica de Chan y otros (1992). Zuñiga (1999) extiende este análisis para considerar modelos de varianza condicional del tipo GARCH, mientras que Fernández (1999) presenta esta estimacion utilizando métodos no-paramétricos. Parisi utiliza información de los PDBC (Pagarés Descontables del Banco Central de Chile), mientras que Fernández usa la tasa promedio de depósitos interbancarios como una medida aproximada de los PBDC's. Finalmente, Zuñiga utiliza Bonos de Reconocimiento que fueron emitidos por el Instituto de Normalización Previsional.

Tanto Parisi, quien utiliza GMM, como Zuñiga, cuyas estimaciones se basan en Máxima Verosimilitud, encuentran que un modelo con volatilidad variable en el tiempo representa la dinámica de la tasa corta. Ambos autores no pueden rechazar el modelo propuesto por Cox y otros (1985) en el cual la volatilidad de la tasa corta depende del nivel. En términos de (5) sus estimaciones indican $\hat{\phi}$'s de $\exp(-0.45) = 0.64$ y $\exp(-0.35) = 0.7$ respectivamente.

A.3 Estimaciones recientes

Alfaro (2003) propone una variación en la estimación del modelo de Nelson y Siegel implementado por Herrera y Magendzo, permitiendo un ajuste en las tasas de descuento en sustitución de los precios de los bonos. Esta modificación implica asumir que el retorno de un bono con cupones de madurez n es similar al obtenido por un bono de descuento con madurez igual a la duración del bono con cupones. Adicionalmente se agregan a la estimación de la curva los nuevos instrumentos emitidos por la autoridad monetaria BCP's y BCU's (Bonos del Banco Central de Chile en pesos y en Unidades de Fomento).

Una segunda ola de trabajos de curva afines se inicia con Ochoa (2006) quien extiende el modelo de Vasicek (1977) con un componente no observado siguiendo a Balduzzi y otros (1998), mientras Cortázar y otros (2007) utilizan de manera comercial un modelo de 3 factores para la estimación de curva de rendimiento tanto de bonos de gobierno como de empresas. En ambos casos las estimaciones minimizan las diferencias en los precios de los instrumentos las cuales son realizadas utilizando el filtro de Kalman para considerar el factor no observado (Ochoa) o para solucionar el tema de transacciones infrecuentes (Cortázar y otros).

Interpretando los resultados de Ochoa bajo el modelo (12) tenemos que $\hat{\phi}_1 = \exp(-0.3) = 0.74$, mientras que $\hat{\phi}_2 = \exp(-0.03) = 0.97$. Cortázar y otros presentan los resultados para 1, 2 y 3 factores del tipo (11) para el período 1997-2001. Para 1 factor ellos encuentran $\hat{\phi}_1 = \exp(-0.21) = 0.81$, algo más alto que lo encontrado por Parisi ($\hat{\phi}_1 = \exp(-0.5) = 0.61$) bajo el mismo modelo para el período 1983-1995. Para 2 factores los resultados indican que $\hat{\phi}_1 = 1$ y $\hat{\phi}_2 = \exp(-0.87) = 0.42$, lo que es consistente con el modelo (10). Finalmente para el modelo con 3 factores los autores obtienen $\hat{\phi}_1 = 1$, $\hat{\phi}_2 = \exp(-1.11) = 0.33$ y $\hat{\phi}_3 = \exp(-2.16) = 0.12$.

Por otro lado, Morales (2007) explora la motivación de Diebold y Li (2006) al considerar el modelo dinámico de Nelson y Siegel y su relación con factores macroeconómicos en un ambiente tipo VAR. El autor muestra que el algoritmo simplificado de 2 etapas propuesto por Diebold y Li (2006), el cual implica calibrar el parámetro α del modelo y realizar estimaciones lineales, no genera mayores diferencias que la estimación con filtro de Kalman.

B Pruebas Matemáticas

B.1 Proceso AR(1)

El resultado es fácil de corroborar pues por series tenemos $\sum_{i=0}^{n-1} \phi^i = (1-\phi^n)/(1-\phi)$, mientras que $E_t(z_{1,t+i}) = (1-\phi^i)z^* + \phi^i z_t = z^* + \phi^i(z_t - z^*)$, lo que aplicado al modelo implica lo siguiente:

$$z_{nt} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[z^* + \phi^i(z_t - z^*)\right] = z^* + \left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right)\frac{(z_{1t} - z^*)}{n}$$

B.2 Integrales Nelson-Siegel

Consideremos las siguientes integrales con $a \neq 0$:

$$\int_0^n \exp(ax)dx = \frac{\exp(an)}{a} - \frac{1}{a} \;\; \text{y} \;\; \int_0^n x\exp(ax)dx = \frac{\exp(an)}{a}\left(n - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}\left(0 - \frac{1}{a}\right)$$

Utilizando estas formas notamos que la tasa de descuento es:

$$\begin{aligned}
z(n) &= \frac{1}{n}\int_0^n f(s)ds = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n}\int_0^n \exp(-\alpha s)ds + \alpha\frac{\lambda_3}{n}\int_0^n s\exp(-\alpha s)ds \\
&= \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\exp(-\alpha n)}{\alpha}\right) + \alpha\frac{\lambda_3}{n}\left[\frac{1}{\alpha}\left(0 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\exp(-\alpha n)}{\alpha}\left(n + \frac{1}{\alpha}\right)\right] \\
&= \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n}\left[\frac{1 - \exp(-\alpha n)}{\alpha}\right] + \frac{\lambda_3}{n}\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\exp(-\alpha n)}{\alpha}(\alpha n + 1)\right] \\
&= \lambda_1 + \lambda_2\left[\frac{1 - \exp(-\alpha n)}{\alpha n}\right] + \lambda_3\left[\frac{1 - \exp(-\alpha n)}{\alpha n} - \exp(-\alpha n)\right]
\end{aligned}$$

B.3 Nelson-Siegel Discreto

La prueba de este resultado se basa en el último término. Nuevamente por series tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\phi^i = \frac{\phi}{(1-\phi)^2}\left[1 - n\phi^{n-1} + (n-1)\phi^n\right]$$

lo que nos permite trabajar el último término como sigue:

$$(1-\phi)\sum_{i=0}^{n-1} i\phi^{i-1} = \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\sum_{i=1}^{n-1} i\phi^i = \frac{1 - n\phi^{n-1} + (n-1)\phi^n}{1-\phi} = \left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) - n\phi^{n-1}.$$

B.4 Factor Observable

Bajo un factor tenemos que $G_n = 1 + \phi G_{n-1}$, lo cual puede solucionarse recursivamente utilizando la condición $G_0 = 0$. De este modo, tenemos que $G_1 = 1$, $G_2 = 1 + \phi G_1 = 1 + \phi$, $G_3 = 1 + \phi G_2 = 1 + \phi(1+\phi) = 1 + \phi + \phi^2$ y $G_4 = 1 + \phi G_3 = 1 + \phi(1 + \phi + \phi^2) = 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3$. Con esto se puede establecer que la forma de la recursión es $G_n = \sum_{i=0}^{n-1} \phi^i$, la cual por series sabemos que tiene solución cerrada para $|\phi| < 1$: $G_n = (1 - \phi^n)/(1 - \phi)$.

La última sección es corroborar que el candidato es efectivamente la solución. Notamos que $(1-\phi)G_n = (1 - \phi^n)$, por lo que la ecuación se satisface dado que al multiplicar por $(1-\phi)$ el lado derecho se reduce a: $(1-\phi)+\phi(1-\phi^{n-1})=(1-\phi^n)$.

B.5 Términos de Jensen

Notamos que bajo el supuesto de que $e_{t+1}\sim N(0,\sigma^2)$, entonces ν_n tiene forma cerrada, derivado de la función generadora de momentos de e_{t+1}: $\nu_n=(1/2)\text{Var}_t\left(b_{n-1,t+1}+m_{t+1}\right)=\sigma^2\left(\beta-G_{n-1}\right)^2/2$. Bajo raíz unitaria $G_n=n$, asumiendo $\sigma=o(1/n)$ tenemos que $\nu_n=o(1)$.

B.6 Factor no observable

El problema para un factor no observable corresponde a $H_{2n}=(1-\phi_1)H_{1,n-1}+\phi_2 H_{2,n-1}$. Hemos resuelto el problem para $H_{1n}=(1-\phi_1^n)/(1-\phi_1)$ siguiendo el procedimiento presentado en la sección anterior.

Para simplificar la notación consideraremos $G_n\equiv H_{2n}$, por lo cual con el reemplazo de $H_{1,n-1}$ tenemos el siguiente problema $G_n=(1-\phi_1^{n-1})+\phi_2 G_{n-1}$.

Nuevamente bajo $n=0$ tenemos que los coeficientes son cero. De esta forma, $G_1=0$, $G_2=1-\phi_1$, $G_3=1-\phi_1^2+\phi_2 G_2=1-\phi_1^2+\phi_2(1-\phi_1)=1+\phi_2-(\phi_1\phi_2+\phi_1^2)$ y $G_4=1-\phi_1^3+\phi_2 G_3=1-\phi_1^3+\phi_2[1+\phi_2-(\phi_1\phi_2+\phi_1^2)]=1+\phi_2+\phi_2^2-(\phi_1\phi_2^2+\phi_1^2\phi_2+\phi_1^3)$.

En este caso la recursión corresponde a $G_n=\sum_{i=0}^{n-2}\phi_2^i-\sum_{i=1}^{n-1}\phi_1^i\phi_2^{n-1-i}$. Notamos que podemos agregar a la primera sumatoria el elemento ϕ_2^{n-1} llevando la sumatoria hasta $n-1$ y sustraerlo en la segunda al partir en $i=0$. De esta forma:

$$\begin{aligned} G_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\phi_2^i-\sum_{i=0}^{n-1}\phi_1^i\phi_2^{n-1-i}=\sum_{i=0}^{n-1}\phi_2^i-\phi_2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^i \\ &= \left(\frac{1-\phi_2^n}{1-\phi_2}\right)-\frac{\phi_2^n}{\phi_2}\left[\frac{1-(\phi_1/\phi_2)^n}{1-(\phi_1/\phi_2)}\right]=\left(\frac{1-\phi_2^n}{1-\phi_2}\right)-\left(\frac{\phi_2^n-\phi_1^n}{\phi_2-\phi_1}\right). \end{aligned}$$

Documentos de Trabajo Banco Central de Chile	**Working Papers Central Bank of Chile**
NÚMEROS ANTERIORES	PAST ISSUES

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de $500 si es dentro de Chile y US$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper. Printed versions can be ordered individually for US$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.

DTBC-524 Agosto 2009
The Effect Of Credit Insurance On Liquidity Constraints And Default Rates: Evidence From A Governmental Intervention
Kevin Cowan, Alejandro Drexler y Álvaro Yañez

DTBC-523 Agosto 2009
FDI vs. Exports: Accounting for Differences in Export-Sales Intensities
Miguel F. Ricaurte, Katherine Schmeiser

DTBC-522 Agosto 2009
Traspaso De Grandes Cambios De La Tasa De Política Monetaria - Evidencia Para Chile
J. Sebastián Becerra, Luís Ceballos, Felipe Córdova y Michael Pedersen

DTBC-521 Julio 2009
Corporate Tax, Firm Destruction and Capital Stock Accumulation: Evidence from Chilean Plants
Rodrigo A. Cerda y Diego Saravia

DTBC-520 Junio 2009
Cuando el Índice de Fuerza Relativa Conoció al Árbol Binomial
Rodrigo Alfaro y Andrés Sagner

DTBC-519 Junio 2009
Skill Upgrading and the Real Exchange Rate
Roberto Álvarez y Ricardo A. López

DTBC-518 Junio 2009
Optimal Taxation with Heterogeneous Firms
Rodrigo A. Cerda y Diego Saravia

DTBC-517 Junio 2009
Do Exchange Rate Regimes Matter for Inflation and Exchange Rate Dynamics? The Case of Central America
Rodrigo Caputo G. e Igal Magendzo

DTBC-516 Abril 2009
Interbank Rate and the Liquidity of the Market
Luis Ahumada, Álvaro García, Luis Opazo y Jorge Selaive